

---

## Глава 5

---

### Уравнение переноса

В задачах математической физики при описании движения или переноса в сплошной среде часто встречается так называемая материальная (или субстанциональная) производная, которая имеет вид

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla.$$

Например, для описания переноса примеси с концентрацией  $u(\mathbf{x}, t)$  в заданном поле скорости  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  при отсутствии процессов диффузии используется дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка

$$u_t + \mathbf{v} \cdot \nabla u = f,$$

где  $f = f(\mathbf{x}, t)$  — источник примеси.

Другой, более сложный пример — уравнение Эйлера для описания движения идеальной жидкости

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + f,$$

где  $p$  — давление,  $f$  — сила, действующая на жидкость.

FreeFem++ предоставляет пользователю конструкцию `convect[...]`, позволяющую эффективно вычислять материальную производную. Математический аппарат, использованный для создания алгоритма вычислений, тесно связан с методом характеристик для уравнений гиперболического типа в частных производных первого порядка.

#### 5.1 Постановка задачи Коши для гиперболических уравнений

Пусть дано гиперболическое уравнение в частных производных первого порядка

$$u_t + \mathbf{v} \cdot \nabla u = f. \tag{5.1}$$

Ограничимся рассмотрением пространственно одномерного случая и для определенности считаем, что исследуется процесс переноса примеси с концентрацией  $u(\mathbf{x}, t)$  в поле скорости  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ . Источник (или сток)

примеси задан известной функцией  $f(\mathbf{x}, t)$ . Заметим, что в общем случае скорость переноса может зависеть и от концентрации  $u$ , т. е.  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t, u)$ .

Для однородного уравнения (5.1) поставим задачу Коши, задав начальное условие (конечно, это можно сделать и для неоднородного уравнения)

$$u_t + v(x, t)u_x = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \quad (5.2)$$

$$u(x, 0) = g(x), \quad -\infty < x < +\infty. \quad (5.3)$$

Теория решения такой задачи, даже в случае  $v = v(x, t, u)$ , хорошо развита (см., например, [17, 18]).

В случае, например, области  $0 \leq x < +\infty$  можно поставить и краевую задачу, задав в точке  $x = 0$  условие  $u(0, t) = h(t)$ . Такая задача, на самом деле, также является задачей Коши. Дело в том, что переменные  $x, t$  в уравнении (5.2) лишь условно считаются координатой и временем. Производные  $u_t$  и  $u_x$  входят в уравнения достаточно равноправным образом и с таким же успехом можно считать, что  $t$  это координата, а  $x$  — время.

## 5.2 Метод характеристик

Коротко изложим суть метода характеристик, позволяющего получить решение задачи (5.2), (5.3), по крайней мере, локально по времени.

Пусть на плоскости  $(x, t)$  задана достаточно гладкая линия  $\Gamma$ . Предположим, что известны параметрические уравнения, задающие эту линию (см. рис. 5.1)

$$\Gamma: x = X(\tau), \quad t = t(\tau). \quad (5.4)$$

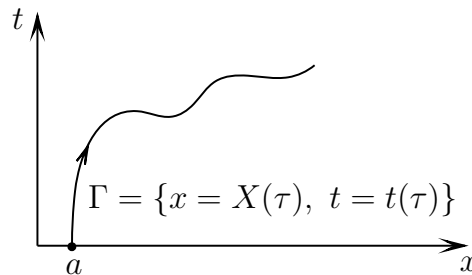


Рис. 5.1. Характеристика на плоскости  $(x, t)$

Рассмотрим функцию  $u(x, t)$  на линии  $\Gamma$

$$u|_{\Gamma} = u(X(\tau), t(\tau)) = U(\tau). \quad (5.5)$$

Предполагая, что  $u$  — достаточно гладкая функция двух переменных, найдем производную функции  $u$  вдоль линии  $\Gamma$

$$U_{\tau}(\tau) = u_t t_{\tau} + u_x X_{\tau}. \quad (5.6)$$

Потребуем выполнения следующих соотношений

$$t_{\tau} = 1, \quad X_{\tau} = v(X(\tau), t(\tau)). \quad (5.7)$$

Тогда формула (5.6) совпадает с левой частью уравнения (5.2) и в силу этого уравнения производная  $U_\tau(\tau) = 0$

$$U_\tau(\tau) = u_t + vu_x = 0. \quad (5.8)$$

Это означает, что вдоль линии  $\Gamma$  значения функции  $u(x, t)$  не изменяются. Такая линия называется **характеристикой**. Уравнения (5.7) называются уравнениями характеристики и задают семейство линий  $\Gamma$  на плоскости  $(x, t)$ .

Из уравнения  $t_\tau = 1$  (см. (5.7)) следует, что  $\tau = t + \text{const}$ . Без потери общности константу можно считать равной нулю, т. к. это будет означать лишь замену переменной  $t$  (сдвиг по времени). Далее полагаем, что

$$\tau = t. \quad (5.9)$$

Действуя формально, можно ввести оператор дифференцирования

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x}. \quad (5.10)$$

Применяя этот оператор к функции  $u$ , получим

$$\frac{du}{dt} = u_t + vu_x = 0. \quad (5.11)$$

Аналогично, действуя этим оператором на  $x$  и учитывая, что  $x$  и  $t$  — независимые переменные, получим уравнение характеристики

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{dx}{dt} = x_t + vx_x = v(X(t), t). \quad (5.12)$$

Таким образом, уравнение в частных производных первого порядка (5.2) сводится к системе двух *обыкновенных* дифференциальных уравнений (5.11) и (5.12)

$$\frac{dX(t)}{dt} = v(X(t), t), \quad \frac{du(X(t), t)}{dt} = 0. \quad (5.13)$$

Для того, чтобы сформулировать задачу Коши (5.2), (5.3) в терминах обыкновенных дифференциальных уравнений, рассмотрим линию  $\Gamma$  (характеристику), проходящую через точку  $x = a$  на оси абсцисс (см. рис. 5.1). Тогда начальным условием для уравнения этой характеристики будет условие  $X(0) = a$ . Начальное условие для функции  $u$  получим, используя (5.3). При  $t = 0$  имеем  $x = X(0) = a$  и  $u(x, 0) = u(X(0), 0) = g(x) = g(X(0)) = g(a)$ .

Окончательно запишем задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX(t)}{dt} = v(X(t), t), \quad X(0) = a, \quad (5.14)$$

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad u(0) = g(a). \quad (5.15)$$

Данная задача в рассматриваемом случае легко решается. В частности, из уравнения и начального условия (5.15) сразу же следует, что  $u = g(a)$  при всех  $t$ . Это означает, что вдоль каждой характеристики функция  $u$  не изменяется и сохраняет свое первоначальное значение.

Обозначим  $X(t) = F(t; a)$  решение задачи (5.14). Тогда уравнение характеристики, проходящей через точку  $(a, 0)$  на плоскости  $(x, t)$ , задается соотношением

$$x = F(t; a) \quad (a = F(0; a)). \quad (5.16)$$

Считаем, что это уравнение разрешимо относительно  $a$ , т. е.  $a = a(x, t)$ . Тогда решением исходной задачи (5.2), (5.3) будет

$$u(x, t) = g(a(x, t)). \quad (5.17)$$

Читатель, знакомый с основами механики сплошной среды, легко узнает в описанном способе решения переход от эйлеровых переменных  $x$  к лагранжевым переменным  $a$ . Исходная задача (5.2), (5.3) записана в эйлеровых переменных — слежение за изменением функции  $u(x, t)$  осуществляется в каждый момент времени  $t$  в точке  $x$ . Задача (5.14), (5.15) — это исходная задача, записанная в лагранжевых переменных. В этом случае осуществляется слежение за изменением вдоль характеристики функции  $u(a(x, t))$ , которая в начальный момент времени находилась в точке  $x = a(x, 0) = a$ .

**Пример 5.1.** Пусть поле скорости постоянно, т. е.  $v = \text{const}$ . Тогда решением задачи (5.14) будет  $X(t) = F(t; a) \equiv vt + a$ . Уравнение характеристики на плоскости  $(x, t)$  имеет вид  $x = a + vt$  — это прямая, проходящая через точку  $(a, 0)$ . При изменении параметра  $a$  получим семейство параллельных прямых на плоскости  $(x, t)$ . Решая уравнение характеристик относительно  $a$ , имеем  $a = x - vt$ . Окончательно для функции  $u$  имеем  $u(x, t) = g(x - vt)$ . Это означает, что с течением времени начальное распределение  $g(x)$  переносится вдоль оси  $x$  со скоростью  $v$  (бегущая волна). На рис. 5.2 показано семейство характеристик и движение начального профиля функции  $u(x, t)$ .

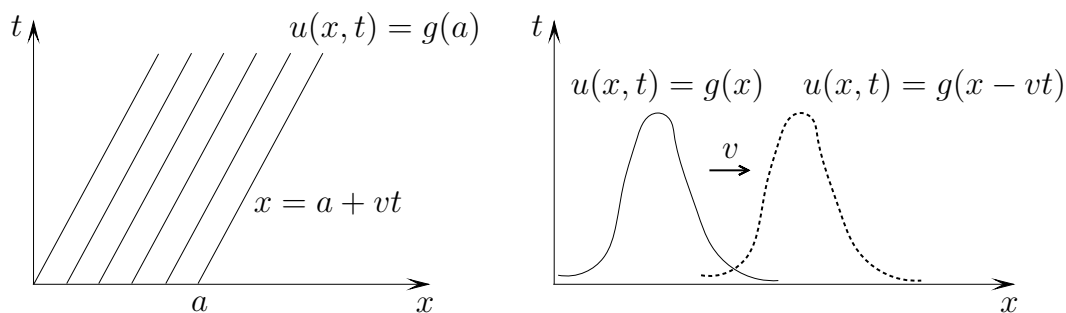


Рис. 5.2. Характеристики на плоскости  $(x, t)$  и движение профиля функции  $u(x, t)$

### 5.3 Метод характеристик (двумерный случай)

Аналогичным образом можно получить решение задачи и в двумерном случае. Ограничимся лишь записью соответствующих соотношений для

уравнений (5.1). Введем дифференциальный оператор

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla. \quad (5.18)$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений аналогичная (5.13) запишется в виде

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{X}(t), t), \quad \frac{du(\mathbf{X}(t), t)}{dt} = f(\mathbf{X}(t), t). \quad (5.19)$$

**Пример 5.2.** Пусть для уравнений (5.19) поставлена задача Коши, т.е. заданы начальные условия

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{a}, \quad u|_{t=0} = g(a_1, a_2), \quad \mathbf{a} = (a_1, a_2), \quad \mathbf{X} = (X_1, X_2), \quad X_1 = x, \quad X_2 = y.$$

Рассмотрим случай, когда поле скоростей задано в виде (твердотельное вращение по часовой стрелке при  $\omega > 0$ )

$$\mathbf{v} = (\omega y, -\omega x),$$

где  $\omega$  — известная угловая скорость вращения.

Тогда, подставляя  $\mathbf{v}$  в (5.19), получим

$$\frac{dX_1}{dt} = \omega X_2, \quad \frac{dX_2}{dt} = -\omega X_1.$$

Легко проверить, что с учетом начальных условий решение записывается в виде

$$X_1 = a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t, \quad X_2 = -a_1 \sin \omega t + a_2 \cos \omega t.$$

Эти соотношения определяют характеристики, проходящие через точку  $(a_1, a_2)$ . В данном случае это окружность, показанная на рис. 5.3.

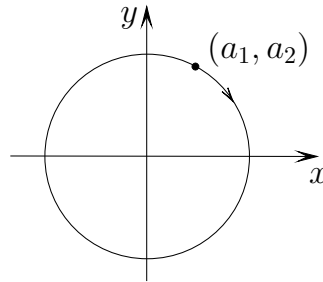


Рис. 5.3. Характеристика на плоскости  $(x, y)$

Введем матрицу поворота (или вращения)  $\Omega$

$$\Omega = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}, \quad \Omega \Omega^T = I, \quad \Omega^{-1} = \Omega^T.$$

Тогда связь между векторами  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{a}$  задается соотношениями

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \Omega \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} = \Omega^T \mathbf{X}.$$

Величины  $a_1, a_2$  выражаются через  $X_1, X_2$  при помощи формул

$$a_1 = X_1 \cos \omega t - X_2 \sin \omega t, \quad a_2 = X_1 \sin \omega t + X_2 \cos \omega t.$$

Функция  $u(\mathbf{x}, t)$  сохраняется вдоль каждой характеристики и имеет вид

$$u(\mathbf{x}, t) = u(x, y, t) = g(a_1, a_2) = g(x \cos \omega t - y \sin \omega t, x \sin \omega t + y \cos \omega t).$$

## 5.4 Аппроксимация уравнения переноса

Приведем некоторые соотношения, которые потребуются в дальнейшем. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{X}(t), t), \quad \mathbf{X}(t_{m+1}) = \mathbf{x}, \quad t_{m+1} = (m+1)\tau. \quad (5.20)$$

Если  $\tau$  достаточно мало, то решение этой задачи в точке  $t = t_m = m\tau$ , используя разложение в ряд Тейлора, запишем в виде

$$\mathbf{X}(t_m) = \mathbf{X}(t_{m+1}) - \tau \frac{d\mathbf{X}(t_{m+1})}{dt} + \mathcal{O}(\tau^2) = \mathbf{x} - \tau \mathbf{v}^m(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(\tau^2), \quad (5.21)$$

$$\mathbf{v}^m(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{X}(t_{m+1}), t_m) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t_m).$$

Как и прежде (см. п. 4.2.1), введем обозначения

$$u^m(\tilde{\mathbf{x}}) = u(\tilde{\mathbf{x}}, t_m), \quad \mathbf{X}^m(\mathbf{x}) = \mathbf{X}(t_m). \quad (5.22)$$

Значения функции  $u^m(\mathbf{X}^m(\mathbf{x}))$  найдем, вновь используя разложение в ряд

$$\begin{aligned} u^m(\mathbf{X}^m(\mathbf{x})) &= u^m(\mathbf{x} - \tau \mathbf{v}^m(\mathbf{x})) + \mathcal{O}(\tau^2) = \\ &= u^m(\mathbf{x}) - \tau \mathbf{v}^m(\mathbf{x}) \cdot \nabla u^m(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(\tau^2). \end{aligned} \quad (5.23)$$

В языке FreeFem++ для вычисления величины  $u^m(\mathbf{X}^m(\mathbf{x}))$  имеется специальная конструкция `convect`

$$u^m(\mathbf{X}^m(\mathbf{x})) = \text{convect}([v_1^m(\mathbf{x}), v_2^m(\mathbf{x})], -\tau, u^m(\mathbf{x})), \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2). \quad (5.24)$$

Обратим внимание, что для определения величины  $u^m(\mathbf{X}^m(\mathbf{x}))$  фактически используется решение задачи Коши (5.20) назад по времени. Иными словами, по точке на характеристике  $\mathbf{x} = \mathbf{X}(t_{m+1})$  в момент времени  $t_{m+1}$  определяется точка на характеристике в момент  $t_m$ , т. е. точка  $\mathbf{X}(t_m)$ .

Запишем для уравнения (5.1) аппроксимацию по времени, используя явную схему (см. формулы (4.13)–(4.15) при  $\theta = 0$ )

$$\frac{u^{m+1}(\mathbf{x}) - u^m(\mathbf{x})}{\tau} + \mathbf{v}^m(\mathbf{x}) \cdot \nabla u^m(\mathbf{x}) = f^m(\mathbf{x}). \quad (5.25)$$

Легко проверить, что с учетом (5.23) это выражение записывается в форме

$$\frac{u^{m+1}(\mathbf{x}) - u^m(\mathbf{X}^m(\mathbf{x}))}{\tau} = f^m(\mathbf{x}). \quad (5.26)$$

Таким образом, для расчета функции  $u$  в точке  $t = t_{m+1}$  достаточно воспользоваться функцией `convect` (см. (5.24))

$$u^{m+1}(\mathbf{x}) = \text{convect}([v_1^m(\mathbf{x}), v_2^m(\mathbf{x})], -\tau, u^m(\mathbf{x})) + \tau f^m(\mathbf{x}). \quad (5.27)$$

## 5.5 Реализация алгоритма на языке FreeFem++

**Пример 5.3 (Перенос примеси в заданном поле скоростей).** Пусть дана задача Коши в круге  $\bar{D}: x^2 + y^2 \leq 1$ , описывающая перенос примеси с концентрацией  $u(x, y, t)$

$$u_t + \mathbf{v} \cdot \nabla u = 0, \quad u|_{t=0} = g(x, y). \quad (5.28)$$

Функцию  $g(x, y)$  и поле скоростей  $\mathbf{v}$  зададим соотношениями

$$g(x, y) = 0,5 \left( 1 + \operatorname{th}(-\beta((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r_0^2)) \right),$$

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2), \quad v_1 = \omega y, \quad v_2 = -\omega x.$$

Это означает, что начальное распределение концентрации примеси  $g(x, y)$  задано в виде кругового «пятна» радиуса  $r_0$  с центром  $(x_0, y_0)$ . В начальный момент времени концентрация примеси в пятне будет  $g \approx 1$  и вне пятна стремится к нулю (скорость стремления к нулю определяется параметром  $\beta$ ).

Для определенности зададим следующие параметры

$$r_0 = 0,1, \quad x_0 = 0,25, \quad y_0 = 0,50, \quad \beta = 10.$$

Код на языке FreeFem++ имеет вид

```

1  int n=4;
2  real t, dt;
3  real x0, y0, r0;
4  // задаем границы области (окружность единичного радиуса)
5  border C(t=0,2*pi){ x=cos(t); y=sin(t); };
6  // строим сетку, на границе 30*n-узлов
7  mesh Th = buildmesh(C(30*n));
8  // задаем пространство конечных элементов
9  fespace Vh(Th,P2);
10 // на Vh задаем искомую функцию u, пробную функцию v и вспом. uOld
11 // используем обозначения: u=u(x,y,(m+1)*dt), uOld=u(x,y,m*dt)
12 Vh u, v1, v2, uOld;
13 // определяем функцию -- начальное распределение примеси
14 // (x0,y0) -- координаты центра пятна примеси; r0 -- радиус пятна
15 func g = 0.5*(1+tanh( -10*((x-x0)^2 + (y-y0)^2 - r0^2)));
16 // задаем поле скоростей
17 real omega=2*pi;
18 v1 = omega*y;      v2 = -omega*x;
19 x0 = 0.25;      y0 = 0.5;      r0 = 0.1;
20 t = 0;          dt = 0.01;
21 uOld = g;
22 // для изображения линий уровня 0.05,0.1,0.2,0.3,...
23 real [int] viso=[0.05,0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9,1];
24 // организуем пошаговое решение задачи
25 for (int m=0; m<=1000; m++)
26   { t = t + dt;
27     u = convect([v1,v2],-dt,uOld);
28     uOld = u;
29     real massa=int2d(Th)(u); // расчет массы
30     cout << massa << endl;
31     plot(u, cmm=" t=" + t + " massa= " + massa, viso=viso);
32   }
```

Заметим, что данную задачу можно также решать, используя слабую формулировку. Это потребует, в частности, в п. 5.7 для учета эффектов диффузии. Опуская стандартные выкладки, укажем лишь изменения, которые следует сделать в коде программы.

Необходимо описать тестовую функцию `vv`

```
Vh vv;
```

записать коды, соответствующие слабой формулировке задачи (напомним, что нельзя объединять интегралы `int2d`, т.к. как один из них содержит билинейную форму, а другой — линейную)

```
problem Transport(u,vv) =
  int2d(Th)(vv*u) - int2d(Th)(vv * convect([v1,v2],-dt,uOld))
  + on(GammaB, GammaL, GammaR, GammaT, u=0) ;
```

и заменить строку

```
u = convect([v1,v2],-dt,uOld);
```

строкой

```
Transport;
```

## 5.6 Вычислительный эксперимент

Результаты расчетов по приведенной программе даны на рис. 5.4, на котором изображены линии уровня концентрации  $u(x, y, t)$  в моменты времени  $t = 0; 0,1; 0,2; 3,0$ .

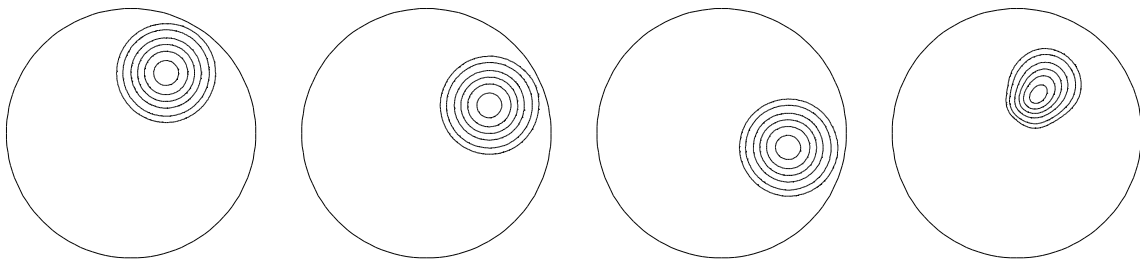


Рис. 5.4. Линии уровня концентрации в моменты времени  $t = 0; 0,1; 0,2; 3,0$

Дополнительную информацию о процессе переноса можно получить, реализовав вычисление массы примеси в области  $D$  (см. строку 29)

$$M(t) = \iint_D u(x, y, t) dx dy.$$

В соответствии с примером 5.2, для поля скоростей  $\mathbf{v} = (\omega y, -\omega x)$  характеристики представляют собой окружности и на каждой характеристике сохраняется начальное значение концентрации. Это, в частности, означает, что «пятно» примеси должно вращаться по часовой стрелке с угловой скоростью  $\omega$  **без искажения формы пятна**.



Расчеты показали, что примесь движется без искажения формы лишь на достаточно малом интервале времени (примерно,  $t < 0,5$ ). На рис. 5.4 при  $t = 3,0$  хорошо видно, что форма «пятна» сильно отличается от первоначальной. Наблюдается также уменьшение массы примеси

$$M(0) = 0,124489, \quad M(0,2) = 0,121216, \quad M(3,0) = 0,074882.$$

На самом деле масса должна сохраняться, так как поле скоростей направлено по касательной к границе и перенос примеси через границу отсутствует. Дефекты расчета (искажение формы и исчезновение массы), конечно же, связаны с вычислительной погрешностью и, в частности, с выбором большого шага движения по времени  $dt=0.01$  (см. строку 20).

## 5.7 Уравнение диффузии–переноса

Аналогичным образом, с использованием конструкции `convect`, можно решать, например, задачу о переносе примеси в известном поле скоростей  $\mathbf{v}(x, y)$  с учетом процессов диффузии.

В случае области  $D$ , на границе которой концентрация примеси  $u(x, y, t)$  задана равной нулю, указанная задача имеет вид

$$u_t + \mathbf{v} \cdot \nabla u - \mu \Delta u = f, \quad u|_{\Gamma} = 0, \quad u|_{t=0} = h(x, y), \quad (5.29)$$

где  $\mu$  — коэффициент диффузии,  $h(x, y)$  — начальное распределение концентрации,  $f(x, y, t)$  — плотность внутренних источников примеси, возникающих, например, в результате химических реакций.

Укажем, как можно изменить код программы для решения нестационарного уравнения Лапласа (см. с. 62), включив в рассмотрение процесс переноса примеси в заданном поле скорости.

Аппроксимация по времени уравнения (5.29) неявной схемой имеет вид (ср. с формулами (4.6), (4.7))

$$\frac{u^{m+1}(\mathbf{x}) - u^m(\mathbf{X}^m(\mathbf{x}))}{\tau} - \mu \Delta u^{m+1}(\mathbf{x}) = f^{m+1}(\mathbf{x}), \quad u^{m+1}|_{\Gamma} = 0. \quad (5.30)$$

Соответствующий код слабой формулировки задачи будет

```
problem DifConv(u,vv) =
    int2d(Th)( u*vv + mu*dt*(dx(u)*dx(vv)+dy(u)*dy(vv)) )
    - int2d(Th)( vv*convect([v1,v2],-dt,uOld) )
    + on(GammaB, GammaL, GammaR, GammaT, u=0);
```

Этим фрагментом кода следует заменить строки 27–31 кода на с. 62 (дополнительно можно удалить неиспользуемые строки 24–25, т. к. на границе задано условие  $u|_{\Gamma} = 0$ ) и определить поле скорости

```
Vh v1, v2;
real omega = 2*pi;
v1 = omega*y;    v2 = -omega*x;
```

После проведенных изменений код на с. 62 можно использовать для решения задачи (5.29).